

# Découpages et inégalités systoliques pour les surfaces hyperboliques à bord

Matthieu Gendulphe

Received: 21 April 2008 / Accepted: 14 January 2009 / Published online: 31 January 2009  
© Springer Science+Business Media B.V. 2009

**Résumé** Semi-eutactic and perfect surfaces are hyperbolic surfaces which have particular variational properties related to the systole (Bavard, J. Reine. Angew. Math. **482**, 93–120, 1997). We focus on these surfaces, and build a systolic cutting procedure to divide them into pieces of Euler-Poincaré characteristic 0, then we give bounds for the systole. We are mainly concerned with bordered surfaces.

**Mots-clé** Hyperbolic Surface · Systole

**Mathematics Subject Classification (2000)** 30F45 · 30F60

## 1 Introduction

### 1.1 La systole des surfaces hyperboliques

La systole d'une surface hyperbolique  $X$  est la longueur de sa plus petite géodésique fermée simple incontractile et non homotope à un bord, on la note  $\text{sys}(X)$ . Étant fixé un type topologique, la systole définit une fonction continue sur l'espace des modules. Depuis la généralisation du critère de Mahler due à C. Chabauty et D. Mumford [7, 10], on sait que la systole tend vers 0 si et seulement si la surface hyperbolique s'approche de l'infini dans

---

L'auteur a été soutenu par le fond Kalman-Soref et par la Swiss National Science Foundation (financement n°200020 – 121506/1).

---

M. Gendulphe (✉)

Department of Mathematics, Bar Ilan University, 52900 Ramat Gan, Israël  
e-mail: matthieu.gendulphe@unifr.ch

*Present Address:*

M. Gendulphe

Département de Mathématiques, Université de Fribourg, Chemin du Musée 23, 1700 Fribourg Pérolles, Switzerland

l'espace des modules. En conséquence, la systole admet un maximum global sur l'espace des modules, et sa détermination constitue le premier problème intéressant concernant la systole des surfaces hyperboliques. Sa résolution s'avère très difficile même si, dans quelques cas, on obtient des solutions simples en s'appuyant sur des particularités géométriques de la surface : points de Weierstrass dans [2], pointes à l'infini dans [14]. Bien que la valeur exacte du maximum ne soit en général pas connue, nous avons certaines estimations. Ainsi dans le cas des surfaces hyperboliques fermées orientables, c'est-à-dire des surfaces de Riemann de genre  $g \geq 2$  munies de leur métrique de Poincaré, l'encadrement suivant décrit de façon satisfaisante le comportement du maximum global de la systole en fonction du genre  $g$  :

$$\frac{4}{3} \log g + c \leq \max_{\mathcal{M}_g} \text{sys} \leq 2 \log g + c'$$

où  $\mathcal{M}_g$  désigne l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre  $g$ , et  $c, c'$  des constantes positives. La majoration vient simplement de la comparaison entre deux volumes : celui de la surface et celui d'un disque de rayon  $\text{sys}/2$  plongé dans la surface. L'obtention de la minoration demande en revanche un travail substantiel, il s'agit de construire des points de  $\mathcal{M}_g$  vérifiant la minoration. La construction de tels points *via* des techniques arithmétiques (groupes fuchsien dérivés d'algèbres de quaternions) a été initiée par P. Buser et P. Sarnak dans [6], puis précisée par M. Schaps, M. Katz et U. Vishne dans [9] d'où nous tirons la minoration (qui n'est valable que pour une infinité de genres).

## 1.2 Théorie de Voronoï géométrique

En dehors de ces résultats quantitatifs, la systole des surfaces hyperboliques bénéficie d'un cadre théorique très abouti, élaboré par C. Bavard [3, 5] et P. Schmutz [13]. On y regarde la systole sur l'espace de Teichmüller. Elle y définit une fonction continue, invariante sous l'action du groupe modulaire. En analogie avec la théorie des réseaux euclidiens, Bavard étend les notions classiques d'*eutaxie*, *semi-eutaxie*, *perfection* et d'*extrémalité* aux surfaces hyperboliques, et retrouve un analogue exact du théorème de Voronoï (Théorème 2.1, [3]). Il obtient également un résultat de finitude pour les surfaces semi-eutactiques ou parfaites (Théorème 6, [4]). Signalons que les surfaces eutactiques correspondent aux points critiques de la systole qui, de même que l'invariant d'Hermite des réseaux euclidiens, est une fonction de Morse topologique (résultat dû à H. Akrouit [1]).

Pour plus de clarté, nous rappelons quelques notions évoquées ci-dessus. Étant donné un type topologique de surfaces hyperboliques, nous considérons  $\mathcal{T}$  l'espace de Teichmüller associé. Précisons que les bords éventuels sont de longueurs fixées. Soient  $P$  un point de  $\mathcal{T}$ , et  $(l_s)_{s \in S(P)}$  la famille des fonctions longueur associées aux géodésiques systole de  $P$ .

**Définition** On dit que le point  $P$  est

- *extrême* s'il réalise un maximum local de la systole sur  $\mathcal{T}$ .
- *parfait* si les gradients  $(\nabla l_s(P))_{s \in S(P)}$  engendrent affinement l'espace tangent  $T_P \mathcal{T}$ .
- *eutactique* (resp. *semi-eutactique*) si le vecteur nul de l'espace tangent  $T_P \mathcal{T}$  appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradients  $(\nabla l_s(P))_{s \in S(P)}$  (resp. appartient à l'enveloppe convexe des gradients  $(\nabla l_s(P))_{s \in S(P)}$ ).

Voici maintenant l'analogue du théorème de Voronoï :

**Théorème** (Schmutz, Bavard) *Une surface hyperbolique est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique.*

### 1.3 Contenu de la note

Dans cette note nous recherchons un encadrement pour la systole des surfaces hyperboliques semi-eutactiques ou parfaites. Nous partons des propriétés topologiques suivantes :

**Lemme 1.1** *Soit  $X$  une surface hyperbolique semi-eutactique ou parfaite. Alors toute géodésique fermée simple orientable  $\gamma$  de  $X$  est intersectée par au moins une géodésique systole distincte de  $\gamma$ .*

*Preuve* Par l'absurde, supposons qu'il existe une géodésique fermée simple orientable  $\gamma$  n'intersectant aucune systole. Considérons un système de coordonnées twist-longueur associé à un ensemble maximal de classes d'homotopie libre disjointes  $\{c_1, \dots, c_n\}$ , avec  $c_1 = [\gamma]$ . Soit  $s$  une géodésique systole de  $X$ . Comme  $s$  est disjointe de  $\gamma$ , la fonction longueur de géodésique  $l_s$ , et son gradient  $\nabla l_s$ , sont indépendants de la coordonnée de twist  $\theta_1 = \theta_\gamma$ . En partant d'un point de l'espace de Teichmüller associé à  $X$ , et en modifiant légèrement sa coordonnée  $\theta_1$ , on obtient un autre point ayant même systole et mêmes géodésiques systole que le précédent. La configuration des gradients des fonctions longueur des géodésiques systole reste inchangée, et le nouveau point est lui aussi semi-eutactique ou parfait. Or ces points (semi-eutactiques, parfaits) sont isolés [4], d'où l'hypothèse d'absurde est bien vérifiée.  $\square$

*Remarque 1.1* Si  $c$  est une classe d'homotopie libre non orientable, on ne peut pas définir de fonction de twist  $\theta_c$  associée, d'où l'hypothèse sur l'orientabilité de la géodésique  $\gamma$ .

**Lemme 1.2** *Soit  $X$  une surface hyperbolique semi-eutactique ou parfaite, il y a au moins deux géodésiques systole de  $X$  qui s'intersectent.*

*Preuve* Si les géodésiques systole de  $X$  étaient toutes disjointes, on pourrait former un système de coordonnées twist-longueur en complétant la famille des géodésiques systole en une famille maximale de classes d'homotopie libre disjointes. Dans ce système de coordonnées on verrait directement que la surface  $X$  ne serait ni semi-eutactique, ni parfaite.  $\square$

Dans le cas des surfaces fermées, on produit habituellement un encadrement de la systole des surfaces semi-eutactique ou parfaite à l'aide de l'inégalité du volume et du lemme du collier :

**Théorème 1.1** *Pour toute surface hyperbolique fermée semi-eutactique ou parfaite on a :*

$$2 \operatorname{arcsinh} 1 < \operatorname{sys} < 2 \log(1 - \chi) + 2 \log 2,$$

où  $\chi$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

*Preuve* Nous avons déjà vu la borne supérieure un peu plus haut. Soit  $X$  une surface hyperbolique fermée, sa demi-systole est égale à son rayon d'injectivité, on peut donc plonger un disque hyperbolique de rayon  $\operatorname{sys}(X)/2$  dans  $X$ . En comparant le volume du disque  $2\pi(\cosh(\operatorname{sys}(X)/2) - 1)$  avec le volume de la surface  $-2\pi\chi(X)$  on obtient la majoration. Supposons  $X$  semi-eutactique ou parfaite, par le lemme précédent au moins deux systoles de  $X$  s'intersectent, d'où la borne inférieure par le lemme du collier.  $\square$

*Remarque 1.2* Le lemme du collier dans le cas non orientable se démontre en regardant une géodésique non orientable comme un bord auto-recollé [8], on travaille ensuite dans un pantalon, puis un pentagone droit pour obtenir l'inégalité voulue.

**Table 1** Quelques exemples de comportements asymptotiques

Surface	Minorant	max sys	Réf.	Majorant
Tore à un bord	$b/4$	$b/3 + o(1)$	[8, 11, 13]	$b/2 + o(1)$
Plan projectif à deux bords	$b/2$	$b/2 + \log(2) + o(1)$	[8]	$2b + o(1)$
Bouteille de Klein à un bord	$b/4$	$b/3 + o(1)$	[8]	$b/2 + o(1)$
Tore à deux bords	$b/4$	$b/2 + o(1)$	[13] §5	$2b + o(1)$
Sphère à $n$ bords	$nb/(4n - 8)$			$2b + o(1)$

Remarquons que cet encadrement reflète bien le comportement asymptotique de la systole. Nous savons déjà que la borne supérieure est de bonne qualité, la borne inférieure nous satisfait elle aussi car on ne peut pas faire mieux qu'une constante (on trouve dans [13] une suite de surfaces extrêmes dont la systole est bornée supérieurement par 5.7 et dont le genre croît en tendant vers l'infini).

Dans le cas des surfaces à bord non vide, le principe de la majoration ne fonctionne plus : le rayon d'injectivité en un point peut être supérieur à la distance au bord, d'où une éventuelle impossibilité de plonger un disque de rayon la demi-systole. Cette éventualité se voit d'ailleurs confirmée, pour une longueur de bord suffisamment grande, par la borne de Bavard sur le rayon d'injectivité des multigéodésiques [5]. Si la minoration demeure valable, elle semble sans intérêt puisque, dans les exemples connus, la systole d'une surface semi-eutactique ou parfaite croît indéfiniment en fonction de la longueur du bord. D'ailleurs, en un certain sens, la systole est une fonction croissante de la longueur du bord (P. Schmutz et H. Parlier, voir [12]).

Dans cette note nous présentons une méthode originale et simple permettant l'obtention du résultat suivant :

**Théorème 1.2** *Soit  $X$  une surface hyperbolique, éventuellement à pointes, mais à bord non vide et totalement géodésique. Si  $X$  est semi-eutactique ou parfaite, alors :*

$$\sup \left( 2 \operatorname{arcsinh} 1, \frac{l_{\partial}}{-4\chi} \right) \leq \operatorname{sys}(X) \leq l_{\partial} + 4 \operatorname{arccosh}(1 - \chi)$$

où  $l_{\partial}$  désigne la longueur du bord, et  $\chi$  la caractéristique d'Euler-Poincaré.

*Remarque 1.3* On n'a ni d'hypothèse de compacité, ni d'hypothèse d'orientabilité.

Évidemment, les termes intéressants dans les bornes sont ceux en  $l_{\partial}$ , ils montrent bien un accroissement asymptotique linéaire de la systole en fonction de la longueur du bord, ce que l'on vérifie sur les exemples connus. Le tableau 1 donne le minorant et le majorant (en fait une version améliorée du majorant que nous verrons en § 4) produits par le théorème. Nous convenons ici que tous les bords de la surface sont de même longueur  $b$ , d'où  $l_{\partial}$  vaut  $b$  fois le nombre de bords. La colonne du milieu donne un développement limité du maximum global de la systole en fonction de  $b$  (voir [13] et [8] pour l'expression du maximum). Les données du tableau laissent penser que le minorant est de bonne facture, ce que confirmera l'étude d'un exemple (§ 5).

Décrivons rapidement le principe de la preuve du théorème. On établit d'abord une procédure de découpe d'arcs de systole, partageant une surface semi-eutactique ou parfaite en morceaux de caractéristique nulle (§ 2 et 3). On considère ensuite les morceaux contenant un

bord de la surface, ces morceaux sont topologiquement des cylindres dont l'un des bords est un bord de la surface et l'autre bord formé d'arcs de systole. En comparant les longueurs de ces bords on obtient la minoration (§ 4). La difficulté consiste à borner le nombre d'arcs de systole découpés (§ 3). La majoration du théorème vient d'un travail sur le rayon d'injectivité du bord de la surface (§ 4). Rappelons que le point clé de l'article réside dans les *propriétés d'intersection des systoles* énoncées dans les lemmes de l'introduction.

#### 1.4 Conventions

Les surfaces hyperboliques sont supposées connexes, de volume fini, et à bords géodésiques par morceaux. Les bords d'une surface hyperbolique semi-eutactique ou parfaite seront supposés totalement géodésiques. Notons que les propriétés variationnelles d'une surface (eutaxie, perfection) sont définies à longueurs de bords fixées, autrement dit tous les points de l'espace de Teichmüller ont mêmes longueurs de bords. Par abus de langage, le mot *systole* désignera aussi les géodésiques réalisant la systole. Par *arc de systole* nous entendrons un segment géodésique supporté par une systole, ce segment pouvant être la systole toute entière. Un lacet simple d'une surface topologique sera dit *orientable* s'il admet un voisinage transversalement orientable, *non orientable* dans le cas contraire. Une pointe (*cusp* en anglais) est un bord de longueur nulle. Enfin, rappelons que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface de genre  $g$  avec  $n$  bords et  $m$  pointes vaut  $\chi = 2 - 2g - n - m$  si la surface est orientable, et  $\chi = 2 - g - m - n$  si la surface est non orientable.

## 2 Découpages et caractéristique d'Euler-Poincaré

Nous allons établir des lemmes topologiques décrivant le comportement de la caractéristique d'Euler-Poincaré en fonction de certains découpages. Dans cette partie  $\Sigma$  désigne une surface topologique compacte avec  $n$  bords  $b_1, \dots, b_n$ . Par moments,  $n$  sera implicitement supposé non nul, ou même supérieur ou égal à 2.

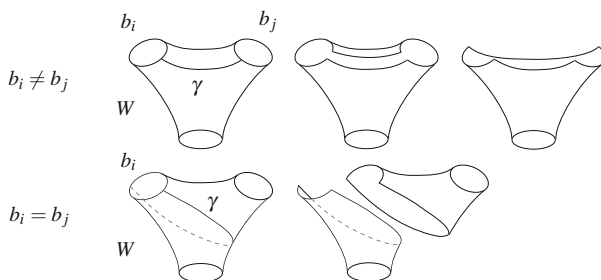
**Lemme 2.1** *Soit  $\gamma$  un chemin simple sur  $\Sigma$  reliant les bords  $b_i$  et  $b_j$ . Si  $i = j$  nous supposons de plus le chemin non homotope à une partie de  $b_i$ .*

- Si  $i \neq j$ , la découpe de  $\gamma$  produit une surface de caractéristique  $\chi(\Sigma) + 1$ .
- Si  $i = j$ , ou bien la découpe de  $\gamma$  produit une surface de caractéristique  $\chi(\Sigma) + 1$ , ou bien la découpe de  $\gamma$  produit deux surfaces dont la somme des caractéristiques est égale à  $\chi(\Sigma) + 1$ .

*Preuve* Considérons  $W$  un voisinage tubulaire compact de  $\gamma \cup b_i \cup b_j$  dans  $X$ .  $W$  est une surface topologique compacte qui se rétracte par déformation sur  $\gamma \cup b_i \cup b_j$ , d'où  $\chi(W) = -1$  et  $\pi_1(W) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Comme  $W$  a au moins deux bords,  $W$  est nécessairement un pantalon. En munissant  $W$  d'une structure hyperbolique, et en découpant le segment géodésique homotope à  $\gamma$  et orthogonal en ses extrémités à  $b_i$  et  $b_j$ , on vérifie facilement les assertions (voir la Fig. 1)  $\square$

**Lemme 2.2** *Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux lacets simples non séparants de  $\Sigma$  s'intersectant transversalement en exactement un point. En découpant  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  nous obtenons :*

- une surface compacte  $\Sigma'$  avec  $\chi(\Sigma') = \chi(\Sigma) + 1$ ,
- ou deux surfaces compactes  $\Sigma'$  et  $\Sigma''$  avec  $\chi(\Sigma') + \chi(\Sigma'') = \chi(\Sigma) + 1$ .



**Fig. 1** Découpages

*Preuve* On se ramène au lemme précédent en découpant  $\gamma_1$ . □

**Lemme 2.3** Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux lacets simples non séparants de  $\Sigma$  s'intersectant transversalement en exactement un point.

- Si les deux lacets sont orientables, alors il existe un tore à un bord plongé dans  $\Sigma$  les contenant.
- Si un lacet est orientable et l'autre non, alors il existe une bouteille de Klein à un bord plongée dans  $\Sigma$  les contenant.
- Si les deux lacets sont non orientables, alors il existe un plan projectif à deux bords plongé dans  $\Sigma$  les contenant.

*Preuve* Découpons  $\gamma_1$ , nous obtenons une surface  $\Sigma'$  avec un ou deux bords supplémentaires. La trace de  $\gamma_2$  sur  $\Sigma'$  devient un lacet reliant le ou les bords associés à  $\gamma_1$ . En reproduisant le raisonnement de la démonstration du lemme 2.1, on construit un pantalon  $W'$  plongé dans  $\Sigma'$  contenant le ou les bords associés à  $\gamma_1$ , ainsi que le chemin associé à  $\gamma_2$ . La surface  $\Sigma$  est le quotient de  $\Sigma'$  par certaines identifications, la projection  $p : \Sigma' \rightarrow \Sigma$  est une application continue et sa restriction  $p|_{\Sigma'} : \Sigma' \rightarrow \Sigma$  un homéomorphisme. Ainsi l'ensemble  $W = p(W')$  est une surface compacte de caractéristique -1, à un ou deux bords, plongée dans  $\Sigma$ . On connaît toutes les surfaces compactes de caractéristique -1 avec un ou deux bords, il y a : le plan projectif à deux bords dont les deux classes d'homotopie libre sont non orientables, la bouteille de Klein à un bord qui ne possède qu'une seule classe d'homotopie libre orientable, et le tore à un bord qui n'a aucune classe d'homotopie libre non orientable. Les lacets  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne sont pas librement homotopes, car leur nombre d'intersection est  $\pm 1$ . Suivant que  $\gamma_1, \gamma_2$  est ou non orientable, on détermine le type topologique de la surface  $W$ . □

**Remarque 2.1** Dans le premier cas, le bord est bien sûr dans la classe d'homotopie libre du commutateur  $[\gamma_1, \gamma_2]$ . Dans le deuxième cas le bord est dans la classe d'homotopie libre  $[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1}]$ , où  $\gamma_1$  représente le lacet orientable et  $\gamma_2$  le lacet non orientable. Et dans le troisième cas, les deux bords sont dans les classes d'homotopie libre  $[\gamma_1 \gamma_2]$  et  $[\gamma_1^{-1} \gamma_2]$ . Soulignons que les classes d'homotopie des bords peuvent être triviales.

**Remarque 2.2** On obtient un résultat similaire en se plaçant dans un cadre différentiel.

### 3 Procédure de découpage systolique

Dans cette partie, nous considérons  $X$  une surface hyperbolique semi-eutactique ou parfaite,  $X$  n'est pas un pantalon. Nous allons présenter une procédure prenant en entrée  $X$  et perme-

tant de choisir au plus  $-2\chi(X)$  arcs de systole de  $X$ , de sorte que leur découpe partage  $X$  en surfaces de caractéristique 0.

### 3.1 Initialisation

On pose  $l_0 = 0$ ,  $\mathcal{X}_0 = \{X\}$ .

### 3.2 Étapes

La  $i$ -ème étape prend en entrée un ensemble fini  $\mathcal{X}_i$  et un entier  $l_i$ . Les éléments de  $\mathcal{X}_i$  sont des surfaces hyperboliques à bords géodésiques par morceaux, elles ont été obtenues par la découpe de  $l_i$  arcs de systole de  $X$ . Les surfaces de  $\mathcal{X}_i$  s'immergent en des sous-ensembles fermés de  $X$ , en les recollant on retrouve la surface initiale  $X$ . Si tous les éléments de  $\mathcal{X}_i$  sont de caractéristique positive ou nulle, la procédure s'arrête. Si au contraire il existe  $Y$  dans  $\mathcal{X}_i$  avec  $\chi(Y) < 0$ , alors la  $i$ -ème étape consiste en l'exécution de l'enchaînement d'instructions suivant :

- (1) Si  $Y$  contient deux systoles de  $X$  s'intersectant. Alors nous découpons une des deux systoles, puis un arc de la deuxième systole reliant deux points de la première systole mais ne l'intersectant pas en d'autres points. Nous posons  $l_{i+1} = l_i + 2$  et passons ensuite à l'instruction (3) sans exécuter l'instruction (2).
- (2) Si  $Y$  contient un arc de systole de  $X$ , rencontrant  $\partial Y$  exactement en ses extrémités, mais non homotope à un arc de  $\partial Y$  dans  $Y$ . Alors nous découpons cet arc de systole. Nous posons  $l_{i+1} = l_i + 1$  et passons ensuite à l'instruction (3).
- (3) L'une des instructions (1) ou (2) a été exécutée. Nous avons obtenu une surface  $Y'$ , ou deux surfaces  $Y'$  et  $Y''$ . Posons  $\mathcal{X}_{i+1} = (\mathcal{X}_i \setminus \{Y\}) \cup \{Y'\}$  ou  $\mathcal{X}_{i+1} = (\mathcal{X}_i \setminus \{Y\}) \cup \{Y', Y''\}$  et passons à l'étape suivante.

Le lemme suivant montre que la procédure est cohérente et ne prend fin que si tous les éléments de  $\mathcal{X}_i$  sont de caractéristique positive ou nulle.

**Lemme 3.1** *Soit  $Y \in \mathcal{X}_i$  avec  $\chi(Y) < 0$ , alors il est possible d'appliquer à  $Y$  l'une des instructions (1) ou (2).*

*Preuve* Si  $Y$  contient deux systoles de  $X$  s'intersectant, l'instruction (1) sera exécutée. À partir de maintenant nous supposons que  $Y$  ne contient pas deux systoles s'intersectant. Dans la suite de la démonstration nous utiliserons la remarque suivante : si tous les bords de  $Y$  sont librement homotopes dans  $X$  à des bords ou des pointes de  $X$ , alors ou bien  $Y = X$ , ou bien  $Y$  est topologiquement un cylindre.

Comme  $\chi(Y) < 0$  et comme  $X$  n'est pas un pantalon, la surface  $Y$  possède une classe d'homotopie libre  $[c]$  simple et non triviale (incontractile dans  $Y$  et  $X$ , et non librement homotope dans  $Y$  et  $X$  à un bord ou une pointe de  $X$ ). Dans le cas où  $Y$  contient une systole de  $X$ , nous supposons de plus que la classe  $[c]$  admet une systole pour représentant. Notons que la classe  $[c]$  peut correspondre à un bord de  $Y$ . Si cette classe d'homotopie libre est orientable, alors par le lemme 1.1 il existe une systole  $s$  de  $X$  telle que le nombre d'intersection de  $[s]$  avec  $[c]$  soit non nul. Dans ce cas on exhibe facilement un arc de  $s$  reliant deux point de  $\partial Y$  mais non homotope à une partie de  $\partial Y$  dans  $Y$ , et on exécute l'instruction (2). S'il n'existe dans  $Y$  aucune classe d'homotopie libre simple orientable et non triviale, alors nécessairement  $Y$  est un plan projectif à deux bords, et ses bords sont aussi des bords de  $X$  car leurs classes d'homotopie sont triviales incontractiles, d'où  $Y = X$ . Mais il y a un seul plan projectif à deux bords semi-eutactique ou parfait (voir [8]), et ses deux géodésiques fermées simples sont des systoles qui s'intersectent, ce qui contredit notre hypothèse.  $\square$

### 3.3 Arrêt de la procédure

Les systoles forment un graphe géodésique sur la surface  $X$ , dont les sommets sont les points d'intersection des systoles, et les arêtes les arcs de systole reliant deux points d'intersection consécutifs. Ce graphe a un nombre fini d'arêtes. Comme à chaque étape de la procédure on découpe au moins une arête, la procédure prend fin en un nombre fini  $N$  d'étapes.

**Proposition 3.1** *Les éléments de  $\mathcal{X}_N$  sont de caractéristique nulle, ce sont topologiquement des cylindres ou des rubans de Möbius. On en déduit que*

$$N = \chi(X) \quad \text{et} \quad l_N \leq -2\chi(X).$$

*Preuve* Les éléments de  $\mathcal{X}_N$  sont de caractéristique 0 ou 1, car ce ne sont pas des sphères. Supposons qu'un élément  $Y'$  de  $\mathcal{X}_N$  soit de caractéristique 1, alors  $Y'$  est un polygone hyperbolique provenant de la découpe d'une surface  $Y$  de caractéristique strictement négative. Il est clair que la découpe effectuée sur  $Y$  a divisé celle-ci en deux composantes connexes, sinon on aurait  $\chi(Y) = 0$  (voir § 2) et non  $\chi(Y) < 0$ . Ainsi si l'instruction (2) a été exécutée, l'arc de systole découpé avait ses extrémités sur le même bord de  $Y$  (voir la démonstration du lemme 2.1). Comme l'une des composantes issue de la découpe est topologiquement un disque fermé, cet arc de systole était homotope à une partie d'un bord de  $Y$ , absurde. Si l'instruction (1) a été exécutée, alors on a dans un premier temps découpé une systole de  $X$  contenue dans  $Y$ . Cela a transformé  $Y$  en une surface hyperbolique avec un ou deux bords supplémentaires, ou en deux surfaces hyperboliques à bords. Maintenant, en raisonnant comme dans le cas précédent, nous trouvons encore une absurdité. On conclut que tous les éléments de  $\mathcal{X}_N$  sont de caractéristique nulle, ce sont donc des cylindres (éventuellement non compacts) ou des rubans de Möbius.

D'après les lemmes du § 2, à chaque étape de la procédure la caractéristique de l'union disjointes des éléments de  $\mathcal{X}_i$  augmente de 1 :

$$\chi \left( \bigsqcup_{Y \in \mathcal{X}_i} Y \right) = \chi \left( \bigsqcup_{Y \in \mathcal{X}_{i-1}} Y \right) + 1 = \cdots = \chi(X) + i.$$

Comme  $\chi(\bigsqcup_{Y \in \mathcal{X}_N} Y) = 0$ , on a  $N = -\chi(X)$  et  $l_N \leq 2N = -2\chi(X)$ .  $\square$

**Application 3.1** En appliquant cette procédure et le lemme 1.1, on trouve que si  $X$  est orientable les systoles forment un graphe géodésique *connexe* sur  $X$ .

## 4 Inégalités systoliques

Nous démontrons maintenant le résultat principal de cette note.

**Théorème 1.2** *Soit  $X$  une surface hyperbolique, éventuellement à pointes, mais à bord non vide et totalement géodésique. Si  $X$  est semi-eutactique ou parfaite, alors :*

$$\sup \left( 2 \operatorname{arcsinh} 1, \frac{l_\partial}{-4\chi} \right) \leq \operatorname{sys}(X) \leq l_\partial + 4 \operatorname{arccosh}(1 - \chi)$$

où  $l_\partial$  désigne la longueur du bord, et  $\chi$  la caractéristique d'Euler-Poincaré.

*Preuve* On considère une surface  $X$  vérifiant les hypothèses du théorème, on note  $b_1, \dots, b_n$  ses bords. En appliquant la procédure de découpage systolique, on partage la surface  $X$  en



cylindres et en rubans de Möbius. Soit  $Y$  un morceau contenant un bord  $b_i$  de  $X$ . Ce morceau est un cylindre dont l'un des bords est  $b_i$ , tandis que l'autre bord est formé d'arcs de systole. Nous nommerons  $b'_i$  ce dernier. Les deux bords du cylindre sont librement homotopes, d'où  $b_i \leq b'_i$ . On a vu que la procédure découpait au plus  $-2\chi(X)$  arcs de systoles. Comme le découpage d'un arc donne deux arcs de mêmes longueurs, ou un arc de longueur double, il vient que dans  $\mathcal{X}_N$  la somme des longueurs des bords formés d'arcs de systole est majorée par  $-4\chi(X)\text{sys}(X)$ . En particulier  $b'_1 + \dots + b'_n \leq -4\chi(X)\text{sys}(X)$ , ce qui implique le deuxième terme dans minoration. Le lemme du collier fournit le premier terme.

Pour la majoration considérons un réel  $\alpha > 4$ . Nous noterons  $r$  le rayon d'injectivité de  $b = \cup_i b_i$  l'union des bords de  $X$ , autrement dit  $r$  est la largeur maximale d'un collier de  $b$ . Si  $r \geq \text{sys}(X)/\alpha$ , alors on peut plonger dans  $X$  un disque hyperbolique de rayon  $\text{sys}(X)/\alpha$ , l'aire du disque étant  $2\pi(\cosh(\frac{\text{sys}(X)}{\alpha}) - 1)$  et l'aire de la surface  $-2\pi\chi(X)$ , on trouve

$$\text{sys}(X) \leq \alpha \operatorname{arccosh}(1 - \chi(X)).$$

Si  $r \leq \text{sys}(X)/\alpha$ , nous considérons un arc  $a$ , géodésique par morceaux, allant d'un bord  $b_i$  à un bord  $b_j$  (pouvant être les mêmes) et réalisant le rayon d'injectivité  $r$ . Soulignons que l'arc  $a$  n'est pas homotope à un arc d'un bord. Découpons  $a$  dans  $X$ , nous obtenons un ou deux nouveaux bords, de longueurs majorées par  $b_i + b_j + 2a$  si  $i \neq j$  et  $b_i + 2a$  si  $i = j$ . L'un de ces bords appartient à la classe d'homotopie libre d'une géodésique fermée simple de  $X$  ( $X$  n'est pas un pantalon), sa longueur est donc plus grande que la longueur de la géodésique, d'où  $\text{sys}(X) \leq b_i + b_j + 2a$  si  $i \neq j$  et  $\text{sys}(X) \leq b_i + 2a$  si  $i = j$ . En remplaçant  $2a$  par  $4\text{sys}(X)/\alpha$  on obtient

$$\text{sys}(X) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 4}(b_1 + \dots + b_n).$$

Des deux majorations précédentes nous déduisons

$$\text{sys}(X) \leq \sup \left( \alpha \operatorname{arccosh}(1 - \chi), \frac{\alpha}{\alpha - 4} l_\partial \right) \quad \forall \alpha > 4.$$

Regardons les deux termes dans le sup comme fonctions de  $\alpha$ . Le premier terme décroît tandis que le second croît indéfiniment. Ainsi le sup atteint sa valeur minimale lorsque les deux termes sont égaux, c'est-à-dire pour  $\alpha = 4 + l_\partial/\operatorname{arccosh}(1 - \chi) > 4$ . On a alors  $\text{sys}(X) \leq l_\partial + 4 \operatorname{arccosh}(1 - \chi)$ .  $\square$

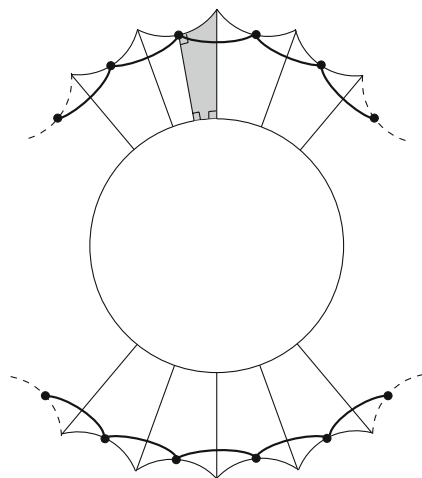
**Remarque 4.1** La procédure de découpage systolique n'intervient que dans la minoration. Comme l'hypothèse *parfaite ou semi-eutactique* sert uniquement à appliquer cette procédure, la majoration reste valable pour toute surface hyperbolique à bord non vide totalement géodésique.

On pourrait reprendre la preuve du théorème et effectuer quelques variations autour de la majoration, par exemple utiliser la borne sur le rayon d'injectivité des multigéodésiques de Bavard [5], on obtiendrait :

$$\text{sys} \leq 2b + 4 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1}{2 \sinh(\frac{l_\partial}{-12\chi})} \right),$$

avec  $b$  la longueur du plus grand des bords ; ou encore étudier le cas où la surface a un seul bord, on trouverait :

$$\text{sys} \leq \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1}{2 \sinh(\frac{b}{-12\chi})} \right).$$



**Fig. 2** Construction de  $X_n(b)$

## 5 Étude d'un exemple

Nous allons construire une suite infinie  $(X_n)_{n \geq 3}$  de familles à un paramètre de surfaces hyperboliques à un bord. Le paramètre de chaque famille sera la longueur  $b$  du bord. Ces familles généraliseront en genre plus grand la famille des tores hyperboliques à un bord extrêmes, que l'on retrouvera dans le cas  $n = 3$ . Nous prouverons l'eutaxie de ces surfaces, et verrons que

$$\text{sys}(X_n(b)) \simeq \frac{b}{n} = \frac{l_\partial}{2 - \chi} \quad \text{pour } n \text{ fixé et } b \rightarrow \infty.$$

Ceci montre bien l'impossibilité de remplacer le terme  $l_\partial/(-4\chi)$  dans la minoration du théorème 1.2 par une expression de la forme  $* \cdot l_\partial$ , où  $*$  désignerait une constante universelle.

### 5.1 Construction de $X_n(b)$

Fixons un entier impair  $n \geq 3$ , et un réel  $b > 0$ . Considérons  $T$  le trirectangle d'angle  $\pi/n$  avec un côté opposé de longueur  $b/(4n)$ . À partir de  $4n$  trirectangles isométriques à  $T$ , nous construisons un polygone régulier troué à  $2n$  côtés, d'angle au sommet  $2\pi/n$ , et de longueur de bord  $b$  (Fig. 2). L'identification des côtés opposés du polygone troué produit une surface topologique compacte orientable avec un bord. Les sommets se répartissent en deux orbites sous l'action des identifications, de sorte que la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface vaut  $\chi = 2 - n$ ; en particulier son genre est  $g = (n - 1)/2$ . Le choix de l'angle du trirectangle assure que la métrique hyperbolique induite sur la surface est lisse sans singularités coniques. Nous appellerons  $X_n(b)$  la surface hyperbolique ainsi construite. Notons que son bord est totalement géodésique de longueur  $b$ .

### 5.2 Isométries de $X_n(b)$

Le groupe d'isométrie du polygone troué est le groupe diédral à  $4n$  éléments, noté  $\mathbf{D}_{2n}$ . Chacune de ses isométries commute avec l'identification des côtés opposés du polygone, et de ce fait induit une isométrie de la surface  $X_n(b)$ . Inversement, toute isométrie de la surface

fixe le bord, et par conséquent se relève en une isométrie du polygone. Il s'ensuit que le groupe d'isométrie de  $X_n(b)$  est exactement  $\mathbf{D}_{2n}$ . Les axes des réflexions se divisent en deux familles : d'une part les perpendiculaires au bord passant par le milieu d'un côté, d'autre part les perpendiculaires au bord passant par un sommet et supportant un côté du polygone (en raison de la parité de  $n$ ). Les axes de la première famille sont deux-à-deux disjoints, tandis que ceux de la deuxième famille s'intersectent deux-à-deux en les deux points de la surface correspondant aux sommets du polygone.

Considérons une surface hyperbolique  $X$ , homéomorphe à  $X_n(b)$  et admettant la même action par isométrie de  $\mathbf{D}_{2n}$ . Puisque l'action est la même, les axes des réflexions se divisent encore en deux familles, et pour l'une d'elles les axes s'intersectent deux-à-deux en deux points. En faisant agir le groupe d'isométrie  $\mathbf{D}_{2n}$ , on voit facilement que les deux points d'intersection sont les mêmes quelle que soit la paire d'axes choisie. Ainsi, les axes de cette famille sont concourants en deux points de  $X$ . Ceci implique que la découpe de ces axes partagera la surface en  $2n$  birectangles de base un segment du bord. On retrouve ainsi la construction vue précédemment, d'où la conclusion  *$X$  est isométrique à  $X_n(b)$  avec  $b$  la longueur de bord de  $X$ .*

### 5.3 Eutaxie de $X_n(b)$

D'après le paragraphe précédent, les points associés à la surface  $X_n(b)$  sont les seuls points de l'espace de Teichmüller fixés par un certain sous-groupe du groupe modulaire. On en déduit *via* le corollaire 1.3. de [4] que la surface  $X_n(b)$  est eutactique. Si  $n = 3$  la surface est l'unique tore à un bord de longueur  $b$  extrême. Si  $n > 3$  la surface n'est pas parfaite car le nombre de systoles est  $n$  (voir le paragraphe suivant), et la dimension de l'espace de Teichmüller  $-7 + 3n$ .

### 5.4 Systole de $X_n(b)$

Les segments reliant les milieux des côtés du polygone troué (Fig. 2), forment dans la surface  $X_n(b)$  des géodésiques fermées simples de longueur  $s$  donnée par :

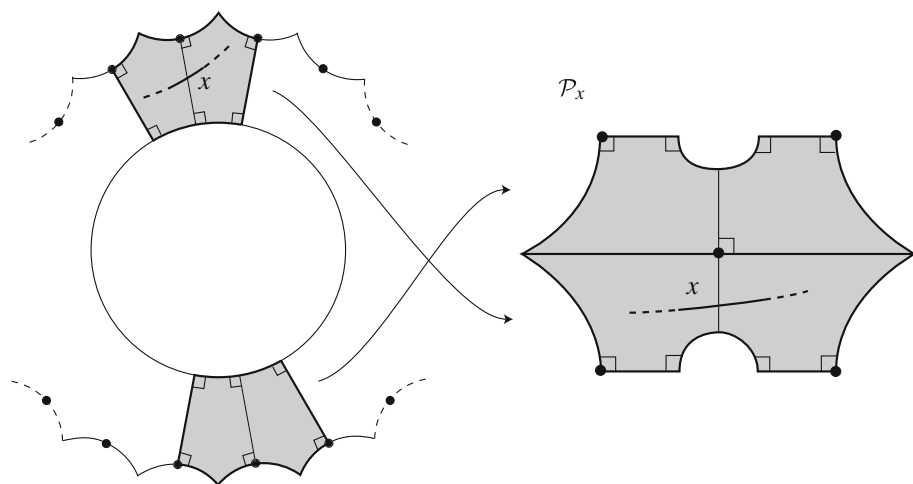
$$\cosh(s/2) = 2 \cos(\pi/n)^2 + \cosh(b/2n).$$

En fait,  $s/2$  est la distance de déplacement du milieu d'un côté par la translation de longueur  $b/(2n)$  le long du bord  $b$ . Rappelons, qu'une translation hyperbolique de longueur  $\lambda$  le long d'un certain axe, déplace un point à distance  $\delta$  de l'axe, d'une longueur  $d$  donnée par :

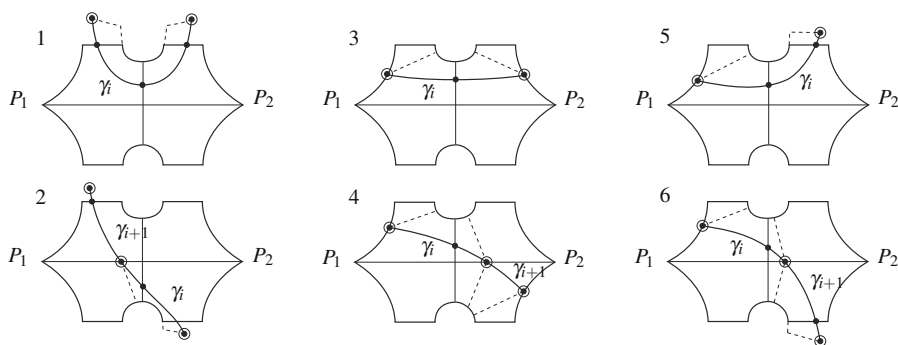
$$\sinh(d/2) = \sinh(\lambda/2) \cosh(\delta).$$

Ces géodésiques sont exactement les systoles de  $X$ . Pour le prouver, regardons la trace d'une géodésique  $\gamma$  sur le polygone troué. Celle-ci consiste en une union finie de segments  $\gamma_1 \dots, \gamma_m$  dont les extrémités sont sur les côtés du polygone. Soit  $p(\gamma_i)$  la projection orthogonale du segment  $\gamma_i$  sur le bord du polygone, si  $p(\gamma_i) \geq b/(2n)$  alors  $\gamma_i \geq s/2$ . Il s'agit donc de montrer l'existence de deux segments  $\gamma_i$  avec  $p(\gamma_i) \geq b/(2n)$ .

Pour cela, adoptons un autre regard sur la surface  $X_n(b)$  : les sommets du polygone se projettent sur deux points de la surface  $P_1$  et  $P_2$ , chaque trirectangle admet exactement l'un de ses deux points pour sommet; ainsi les trirectangles se scindent en deux groupes, et chacun de ces groupes forme dans la surface  $X_n(b)$  un polygone semi-régulier  $\mathcal{P}_i$  de centre  $P_i$ . Le polygone  $\mathcal{P}_i$  a  $2n$  côtés dont  $n$  sont des morceaux de longueur  $b/(2n)$  du bord  $b$ , et  $n$  autres sont des segments orthogonaux en leurs extrémités au bord  $b$ . Remarquons que la surface



**Fig. 3** Construction de  $\mathcal{P}_x$



**Fig. 4** Configuration des  $\gamma_i$

$X_n(b)$  s'obtient en identifiant convenablement chaque côté de  $\mathcal{P}_1$  qui n'est pas un morceau du bord  $b$ , avec un côté de  $\mathcal{P}_2$  qui n'est pas un morceau du bord  $b$ .

Comme les polygones  $\mathcal{P}_i$  sont simplement connexes, la géodésique  $\gamma$  passe plusieurs fois d'un  $\mathcal{P}_i$  à l'autre. Soit  $x$  un point d'intersection de  $\gamma$  avec un côté des polygones  $\mathcal{P}_i$ , considérons la partie  $\mathcal{P}_x$  de  $X_n(b)$  constituée comme en Fig. 3 de 4 trirectangles de  $\mathcal{P}_1$  et 4 trirectangles de  $\mathcal{P}_2$ . Il y a 6 configurations possibles pour la trace de  $\gamma$  sur  $\mathcal{P}_x$ , toutes représentées en Fig. 4. Sur cette figure, les points cerclés (resp. non cerclés) représentent les points d'intersection de  $\gamma$  avec les côtés du polygone troué initial (resp. les côtés des polygones  $\mathcal{P}_i$ ). Dans les configurations 1, 2, 3 et 5 on a clairement  $p(\gamma_i) \geq b/(2n)$  et  $\gamma_i > s/2$ . Dans les configurations 4 et 6, on a clairement  $p(\gamma_i) + p(\gamma_{i+1}) \geq b/(2n)$  et  $\gamma_i + \gamma_{i+1} \geq s/2$ . À partir de là, on montre facilement que les systoles de  $X_n(b)$  sont les géodésiques décrites plus haut.

**Remerciements** Je remercie Christophe Bavard dont les commentaires ont contribué à l'amélioration de ce texte. Je remercie aussi le référé pour ses remarques pertinentes.

## Références

1. Akrou, H.: Singularités topologiques des systoles généralisées. *Topology* **42**(2), 291–308 (2003)
2. Bavard, C.: La systole des surfaces hyperelliptiques. Prépublication de l'École Normale Supérieure de Lyon **71**, 1–6 (1992)
3. Bavard, C.: Systole et invariant d'Hermite. *J. Reine. Angew. Math.* **482**, 93–120 (1997)
4. Bavard, C.: Anneaux extrémaux dans les surfaces de Riemann. *Manuscripta. Math.* **117**(3), 265–271 (2005)
5. Bavard, C.: Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues. *Bull. Soc. Math. France* **133**(2), 205–257 (2005)
6. Buser, P., Sarnak, P.: On the period matrix of a Riemann surface of large genus. *Invent. Math.* **117**(1), 27–56 (1994)
7. Chabauty, C.: Limite d'ensembles et géométrie des nombres. *Bull. Soc. Math. France* **78**, 143–151 (1950)
8. Gendulph, M.: Paysage systolique des surfaces hyperboliques compactes de caractéristique  $-1$ , soumis, disponible à <http://matthieu.gendulph.com>
9. Katz, M., Schaps, M., Vishne, U.: Logarithmic growth of systole of arithmetic Riemann surfaces along congruence subgroups. *J. Differential Geom.* **76**(3), 399–422 (2007)
10. Mumford, D.: remark on Mahler's compactness theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **28**, 289–294 (1971)
11. Parlier, H.: On the geometry of simple closed geodesics, Thèse, EPFL (2004)
12. Parlier, H.: Lengths of geodesics on Riemann surfaces with boundary. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **30**(2), 227–236 (2005)
13. Schmutz, P.: Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length. *Geom. Funct. Anal.* **3**(6), 564–631 (1993)
14. Schmutz, P.: Congruence subgroups and maximal Riemann surfaces. *J. Geom. Anal.* **4**(2), 207–218 (1994)